**Введение.** Математическая модель циркуляции жидкости в водоеме основана на системе полных нелинейных уравнений гидротермодинамики и включает уравнения движения, статики, неразрывности, переноса тепла, а также уравнение состояния [1]. Выпишем систему уравнений движения:



Система уравнений рассматривается в трехмерной области

,

где  – двумерная область, расположенная в плоскости  (зеркало водоема), функция  описывает рельеф дна. Система дополняется следующими граничными



и начальными условиями:



В модели - приняты обозначения: *u* и *v* – компоненты горизонтального вектора скорости течений, соответствующие осям *x* и y;  – давление на невозмущенной поверхности ; ,  – плотность и ее среднее значение;  и  – члены, отвечающие за адвективный перенос и горизонтальную диффузию;  – параметр Кориолиса;  – коэффициент вертикальной турбулентной вязкости;  – вектор внешней нормали к боковой вертикальной границе области ;  – компоненты касательного напряжения трения ветра. В присутствуют интегральные скорости:



а в принимается параметризация придонного трения следующего вида:



В работах [2] и [3] с использованием проекционного варианта интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ) [4] были разработаны разностные схемы для расчета горизонтальных компонент *u* и *v* вектора скорости. В настоящей работе разрабатывается разностная схема для расчета вертикальной компоненты вектора скорости *w*.

**Разностная схема для вертикальной компоненты скорости.** Для вычисления вертикальной компоненты скорости *w* рассмотрим задачу:



Рассмотрим, вообще говоря, неравномерную сетку  с шагами  и числом узлов , зависящим от фиксированной горизонтальной координаты  как от параметра. Для этой сетки разностная схема для решения задачи имеет вид:



где . Во внутренних точках области разностной схемы необходимо вычислять производные  и . Данные производные можно определить через вертикальный поток  по следующим формулам:



**Формулы для расчета вертикального потока .** В работе [3] при построении разностной схемы для расчета бароклинной составляющей горизонтальной компоненты вектора скорости были получены следующие два разностных тождества, которые включают в себя значения вертикального потока:





В и использованы следующие обозначения:  - комплексная скорость;  – оператор разностного дифференцирования;  – шаг по времени;  – оператор осреднения с параметром .

Умножим и на , а затем вычтем из тождества тождество , заменив в  на . В итоге, получим следующие формулы для расчета  во внутренних точках области:



Формулы для вычисления значений  на границе области получим из краевых условий и :



**Численные эксперименты: расчет вертикальной компоненты скорости.** Для демонстрации работы построенной разностной схемы приведем результаты расчетов для тестовой задачи из работы [5]. Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров задачи:



Относительная погрешность вычислялась по формуле:



где  – точное и приближенное решения соответственно. Разностная схема тестировалась при ,  (число узлов по осям *Ox* и *Oy*, соответственно) и различных значениях параметров  (число узлов по оси *Oz*) и  (шаг по времени).

На рисунке 1 приведен график погрешности вычисления вертикальной компоненты скорости при  и . По оси абсцисс идет время, а по оси ординат – погрешность. Из графика видно, что погрешность со временем снижается до некоторого уровня и далее практически не изменяется. Назовем этот конечный уровень погрешности, после которого она практически не изменяется, финальной погрешностью.

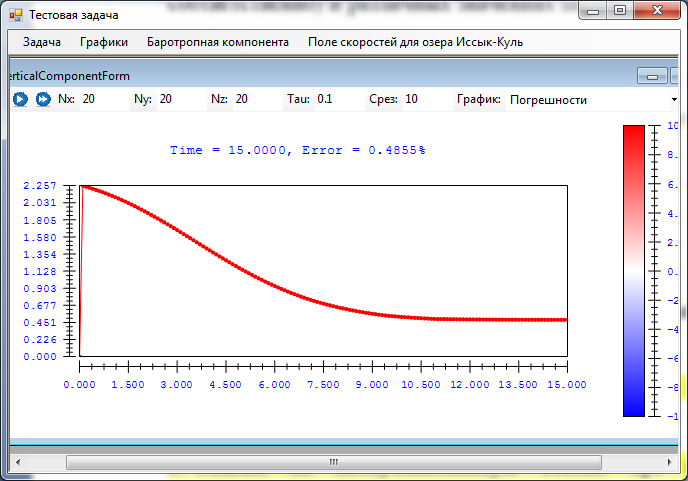
****

Рисунок 1 – Погрешность вертикальной компоненты при , .

Чтобы исследовать влияние параметров  и  на точность разностной схемы, были проведены эксперименты c различными значениями данных параметров. В таблице 1 приведены максимальные и финальные погрешности вычисления бароклинной компоненты при различных значениях параметров  и .

Таблица 1 – Влияния параметров  и  на точность разностной схемы.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметры схемы | Погрешность *w*, % | |
| Финальная | Максимальная |
| , | 0.49 | 2.26 |
| , | 0.35 | 2.09 |
| , | 0.49 | 2.26 |
| , | 0.36 | 2.09 |

Таблица 2 – Эксперименты при .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметры схемы | Погрешность *w*, % | |
| Финальная | Максимальная |
| , | 0.49 | 2.26 |
| , | 0.35 | 2.09 |
| , | 0.49 | 2.26 |
| , | 0.36 | 2.10 |

Таблица 3 – Эксперименты при .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметры схемы | Погрешность *w*, % | |
| Финальная | Максимальная |
| , | 0.49 | 2.26 |
| , | 0.35 | 2.09 |
| , | 0.49 | 2.26 |
| , | 0.36 | 2.10 |

**Численные эксперименты: расчет вертикального потока.** Также были проведены численные эксперименты, направленные на тестирование эффективности формул - для расчета вертикального потока. Численные эксперименты также проводились для тестовой задачи из работы [5] с теми же значениями параметров, что и при расчете вертикальной компоненты вектора скорости. В таблице 4 приведены максимальные и финальные погрешности вычисления вертикального потока при различных значениях параметров  и .

Таблица 4 – Влияния параметров  и  на точность формул -.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметры схемы | Погрешность , % | | Погрешность , % | |
| Финальная | Максимальная | Финальная | Максимальная |
| , | 0.85 | 4.29 | 0.85 | 1.07 |
| , | 0.22 | 1.09 | 0.22 | 0.26 |
| , | 0.84 | 4.33 | 0.86 | 1.07 |
| , | 0.20 | 1.10 | 0.24 | 0.26 |

Таблица 5 – Эксперименты при .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметры схемы | Погрешность , % | | Погрешность , % | |
| Финальная | Максимальная | Финальная | Максимальная |
| , | 1.76-3.13 | 4.46 | 0.84-1.71 | 1.71 |
| , | 0.43-0.80 | 1.12 | 0.21-0.44 | 0.44 |
| , | 1.69-3.00 | 4.49 | 0.79-1.70 | 1.70 |
| , | 0.42-0.79 | 1.13 | 0.18-0.43 | 0.43 |

Таблица 6 – Эксперименты при .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметры схемы | Погрешность , % | | Погрешность , % | |
| Финальная | Максимальная | Финальная | Максимальная |
| , | 0.67 | 2.07 | 0.84 | 0.84 |
| , | 0.19 | 0.52 | 0.22 | 0.22 |
| , | 0.67 | 2.07 | 0.84 | 0.84 |
| , | 0.19 | 0.52 | 0.22 | 0.22 |

**Литература**

1. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. -Москва: Наука, 1988.-302 с.
2. Ссылка на статью про схему для баротропной компоненты из Вестника КРСУ.
3. Ссылка на неопубликованную статью про схему для бароклинной компоненты.
4. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. I. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача // Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. -1988. -№ 4. -С. 10-23; II. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача // Там же, -1989. -№ I. -С. 3-10. III. Самосопряженное уравнение // Там же, -1989. -№ 4. -С. 3-11.
5. Турдушев И.А., Скляр С.Н. Аналитические решения для трехмерной модели ветровых течений в водоеме / Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Материалы второй международной юбилейной конференции, посвященной 20-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета (КРСУ) им. первого президента Б.Н Ельцина и 100-летию профессора Якова Васильевича Быкова. Санаторий «Иссык-Куль Аврора»: 5-7 сентября 2013 года / Под общ. ред. проф. А.К. Керимбекова. – Бишкек: Изд-во Maxprint. Том 2. – С. 214-218.